



УДК 658.51.012

# ОБЗОР МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ПОТОЧНЫХ ЛИНИЙ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ REVIEW OF GOVERNANCE MODELS PRODUCTION LINES MANUFACTURING SYSTEMS

**О.М. Пигнастый**  
**O.M. Pignasty**

*Национальный Технический Университет "ХПИ", Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21  
National Technical University "KhPI", 21 Frunze St, Kharkov, 61002, Ukraine*

*e-mail: pom7@bk.ru*

**Аннотация.** В статье приведен обзор основных моделей управляемого производственного процесса, используемых для проектирования систем управления современными поточными линиями. Выполнен сравнительный анализ разных типов моделей и показаны области применения моделей. Дана краткая характеристика основных параметров моделей. Детально рассмотрены кинетические модели и потоковые модели с использованием уравнений в частных производных.

**Resume.** The article provides an overview of the main models managed manufacturing process used for the design of control systems with modern flow lines. A comparative analysis of different types of models and shows the application of models. A brief description of the main parameters of the models. A detailed analysis of kinetic models and flow models using partial differential equations.

**Ключевые слова:** PDE-модель, производственная линия, массовое производство, незавершенное производство, система управления, балансовые уравнения, производственной линии, уравнение состояния, дискретно-событийная модель, теория массового обслуживания, модель жидкости, Clearing- функция, квазистатистический процесс, переходный процесс, стохастический процесс.

**Keywords:** PDE-model, production line, mass production, work in progress, management system, balance equations of the production line, equation of state, discrete-event model, queuing theory, model fluid, Clearing-function, quasi-static process, transient process, stochastic process.

## Введение

Вопросы планирования и управления производством промышленной продукции определяют ключевые задачи для многих теоретических дисциплин. Большое количество работ, посвященных проектированию систем управления производственными процессами, используют математический аппарат теории исследования операций (Arrow K.J., Karlin S., Бир С., Первозванский А.А. Шкурба В.В., Бессонов В.А., Бигель Дж., Прыткин Б.В.), теории оптимизации (Интрилигатор М., Kempf K., Якимович С.Б., системной динамики (Форрестер Дж.), теории массового обслуживания (Gross D, Harris C.), теории управления запасами (Рыжиков Ю.И.), теории планирования и управления производством (Modigliani F., Holn C., Бусленко Н.П., Дудорин В.И., Емельянов С.В., Митрофанов С.П., Соколицын С.А., Разумов И.М., Балашевич В.А.), статистической теории динамических систем (Власов А.А., Казаков И.Е., Красовский А.А.), статистической теории производственных систем (Азаренков Н.А., Демущий В.П., Пигнастый О.М., Локтев И.И., Петров Б.Н., Тихомиров И.А., Ходусов В.Д., Armbruster D., Ringhofer C.). Проблемам общей методологии моделирования сложных производственно-технических систем посвящены труды отечественных и зарубежных ученых Arrow K.J., Solow R.M., Вильсона А., Власова В.А., Глушкова В.М., Голдрата Э., Занга В.Г., Канторовича Л.В., Летенко В.А., Разумова И.М., Соколицына С.А., Хакена Г., Шананина А.А., Шкурбы В.В.. Вопросам применения DES-,TQ- и Fluid-моделей при проектировании высокоэффективных систем управления поточными линиями уделено внимание в трудах Cassandras C., Heymann M., Hopp W.J., Eekelen J., Ramadge P., Roset B., Wardi Y., Wonham W., Бусленко Н.П., Брагинского К.А., Лысенко Ю.Г., Коробецкого Ю.П., Рамазанова С.К., Руменцева Н.В. Используются математические модели для принятия управленческих и проектно-технологических решений в условиях неопределенности посвящены работы в работах Buzacott J.A., Harrison J., Shanthikumar J.G., Бессонова В.А., Дудорина В.И., Ермольева Ю.М., Зарубы В.Я., Зарубина В.С., Иванилова И.П., Леонтьева В.В., Лотова А.В., Новикова Д.А., Прангишвили И.В., Редькина А.К., Тихомирова А.К., Тихонова А.Н.

Модель стратегического развития предприятия определяется спросом на выпускаемую продукцию. Промышленное предприятие имеет доступ в течение производственного цикла к ограни-



ченному набору технологических ресурсов, производит в единицу времени ограниченное количество продукта, определяемое производственной мощностью (эффективностью использования технологического оборудования) [1]. Конкурентноспособность предприятия в значительной степени характеризует объем выпуска продукции в единицу времени, длительность производственного цикла и объем незавершенного производства (WIP: work in process or in-process inventory) [1, 2]. В большинстве работ они приняты в качестве основных параметров модели. Предметы труда, находящиеся в незавершенном производстве, распределены вдоль технологического маршрута. Это распределение определено динамикой поступления предметов труда на первую технологическую операцию и выходом готовой продукции с последней, неравномерностью времен обработки и ограничениями на использовании ресурсов для каждой технологической операции [1,3-7]. Оптимизация параметров систем управления производственными линиями привела к появлению двух взаимосвязанных задач планирования и управления производством. Прямая задача заключается в оценке длительности производственного цикла и пропускной способности производственной системы в зависимости от количества распределенных вдоль технологического маршрута предметов труда [8, с.4591]. Обратная задача заключается в определении необходимого количества предметов труда в незавершенном производстве и его распределения вдоль технологического маршрута для обеспечения выпуска готовой продукции с заданной во времени интенсивностью. Для решения указанных задач использованы разнообразные модели управляемых производственных процессов, основные характеристики некоторых из них приведены ниже.

#### **Дискретно-событийные модели производственного процесса (DES-модели) [1, 9].**

В настоящее время при проектировании систем управления поточными линиями широко используются дискретно-событийные модели управляемого процесса (Ankenman B. E., Bekki J. M., Fowler J., 2010) [9], основанные на детальной имитации процесса переноса технологических ресурсов на предмет труда для каждой единицы оборудования поточной линии. Uzsoy R. (2011) [10], Kacar N. (2012) использовали DES-модели описания поточной линии для уточнения информации о состоянии предметов труда вдоль технологического маршрута. Погрешность модели определена факторами, связанными с выбором масштаба времени планирования. Применение DES-моделей планирования производства с разработкой детального графика загрузки производственных мощностей во времени позволило получить зависимость выпуска готовой продукции от вида функции распределения предметов труда по технологическим операциям (Lu S., [11]). Диспетчерские правила (Шкурба В.В., [7]), описывающие стратегию управления, регулируют возникновение дискретных событий начала и окончания обработки предмета труда на каждой технологической операции. Более сложные алгоритмы планирования при построении диспетчерских правил оптимизируются длительность производственного цикла и темп движения предметов труда вдоль технологического маршрута (Lasserre J. [12]). Точность соответствия DES-модели реальному производственному процессу, может быть сколь угодно высокой за счет детализации описания технологической операции и увеличения количества повторений численного эксперимента [13], теоретически ограничивается погрешностью вычислительной схемы. Затраты машинного времени, необходимого для вычисления (частота процессора 4 ГГц) миллион итераций DES-модели (Berg R., Lefebvre E., [13]) для партии 10 тыс. деталей, движущейся по технологическому маршруту, состоящему из 20 технологических операций, составляют от нескольких часов до нескольких дней [14]. В то же время, требуемая длительность интервала планирования для систем управления параметрами поточной линии современных производственных предприятий не должна превосходить несколько минут [15, с.7], (рис.1). Следующая проблема дискретного моделирования связана с тем, что процесс переноса технологических ресурсов на предмет труда в результате выполнения технологической операции является стохастическим [8, с.4589]. Случайными являются как время выполнения технологической операции, так и количество перенесенных ресурсов на предмет труда. Продолжительность вычислений, превышающая требуемый промежуток планирования, стохастичность процесса переноса технологических ресурсов на предмет труда и отсутствие конечной функциональной связи между параметрами поточной линии не позволяют эффективно использовать DES-модели в качестве инструмента управления параметрами современной производственной поточной линии. DES-модели, применяемые для описания производственных систем, например, для моделирования поточных линий по производству полупроводниковой продукции [16], являются «относительно медленными» [8, с.4589], что не позволяет их эффективно использовать для построения систем управления и планирования производством.

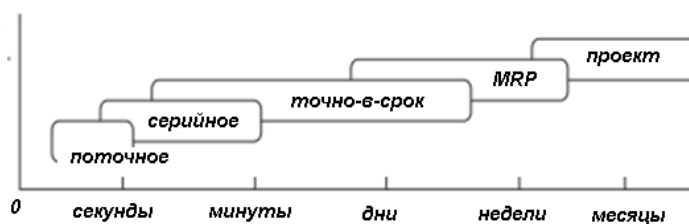


Рис.1. Длительность интервала принятия решения [15, p.7]

Fig. 1. The duration of the interval decision making [15, p.7]

**Модели теории массового обслуживания (TQ-модели)** [1,5,17,18] широко используются для описания производственных линий в установившемся режиме. Повышение производительности вычислений достигается переходом от дискретного описания поведения предметов труда к непрерывному описанию с использованием усредненных числовых характеристик. С точки зрения использования вычислительных ресурсов модели теории массового обслуживания [17] для стационарных режимов функционирования производственной линии являются эффективнее DES-моделей, позволят представить аналитическую функциональную зависимость между потоковыми параметрами модели. Достаточно хорошо представлены TQ-модели производственных линий в работах Buzacott J.A., Shanthikumar J.G., Chao X., Hopp W.J. [18], Lefebvre E.[19], которые сосредоточили свое внимание на взаимной связи между длительностью производственного цикла изготовления партии деталей и количеством предметов труда в межоперационных накопителях (рис.2). Очередь изделий, ожидающих обработку, представляет незавершенное производство (WIP) производственной системы. Достаточно точную оценку выходной траектории параметров удалось получить только для установившегося режима работы производственной линии, состоящей из небольшого количества технологических операций. Постоянное наличие переходных процессов в ходе функционирования производственной линии требует использование более совершенных нестационарных моделей, что приводит к значительному увеличению времени счета и к отсутствию наглядной функциональной связи между параметрами производственной линии [14]. При описании переходных нестационарных процессов TQ-модели теряют свои преимущества перед DES-моделями. Применение TQ-моделей для переходных режимов приводит к чрезмерному усложнению задачи. Существенным ограничением их применения является то, что современные производственные линии состоят из большого числа технологических операций. Как правило, используются одномоментные модели теории массового обслуживания. Двухмоментные модели, учитывающие дисперсию параметров обработки предметов труда, для описания производственных линий практически не встречаются в связи со сложностью их построения. Следующим ограничением для применения TQ-model является то обстоятельство, что основные формулы получены для установившихся режимов ( $t \rightarrow \infty$ ), что автоматически подразумевает выполнение неравенства  $\lambda < \mu$  (рис.2), где  $\lambda$  - интенсивность поступления предметов труда на обработку;  $\mu$  - интенсивность обработки предметов труда.

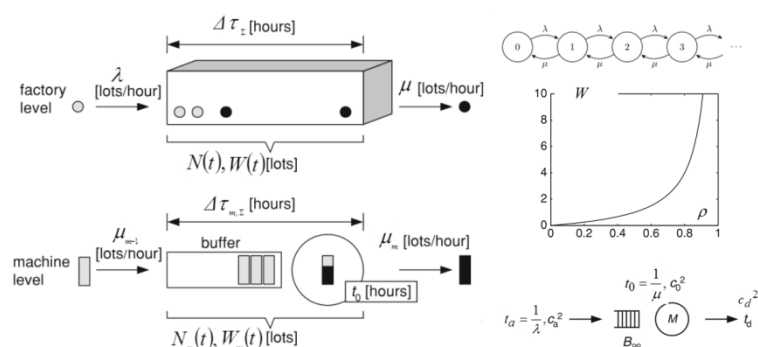


Рис. 2. Основные параметры TQ-модели [19, p.10]

Fig. 2. The basic parameters TQ-model [19, p.10]

В действительности, для большинства производственных линий с конечным производственным циклом справедливо неравенство  $\lambda \geq \mu$ , что не позволяет использовать хорошо разработанный аппарат теории массового обслуживания для установившихся процессов. Решение указанных про-



блем приводит к высокой размерности задачи, громоздким вычислениям, требует значительных вычислительных ресурсов.

**Модели жидкости производственных процессов (Fluid-модели)** [6,20,21]. Широкий класс описания управляемых производственных процессов содержат уравнения переноса. Данный класс эффективно используется для описания переходных нестационарных, в основном детерминированных производственных процессов. Традиционно различают два подхода к представлению потока предметов труда вдоль технологического маршрута. Первый подход заключается в агрегации предметов труда по состояниям [21] и с последующим построением уравнений переноса, второй, более распространенный, в представлении потока изделий в виде непрерывной жидкости (Fluid-модель, Форрестер Дж., 1961, [6]), для описания которой используются уравнения переноса. Концептуально дискретные Fluid-модели (рис.3) представляют  $m$ -ое рабочее место в сети массового обслуживания в виде  $m$ -ого накопителя емкостью и задвижки между  $(m-1)$ -ым и  $m$ -ым накопителем, регулирующей с интенсивностью  $\mu_{m-1}$  движение предметов труда между ними (Kefeli, Uzsoy, Fathi, Kay, 2011) [1]:

$$\frac{dq_m}{dt} = \mu_{m-1} - \mu_m, \quad m = 1..M, \quad \mu_0 = \lambda, \quad (1)$$

где  $q_m$  - незавершенное производство (WIP) в межоперационном заделе перед  $m$ -ым технологическим оборудованием (длина очереди),  $\mu_m$  - темп обработки предметов труда на  $m$ -ом технологическом оборудовании,  $\mu_0 = \lambda$  - интенсивность поступления предметов труда на первую технологическую операцию. Дискретизация модели обусловлена удобством взаимосвязи уравнений модели с конкретными потоковыми параметрами для участка технологического маршрута производственной линии: межоперационными заделами в накопителе  $q_m$ , темпом обработки предметом труда на текущем  $\mu_m$  и предыдущем  $\mu_{m-1}$  участке. Уравнения (1) Fluid-модели являются непрерывными во времени и дискретными в пространстве, описывают  $N$  пространственных частей потока предметов труда. Набор обыкновенных дифференциальных уравнений (1) представляет временную эволюцию длины очереди предметов труда в межоперационном заделе, может быть представлено в форме уравнений Форрестера (1961) [6], моделируют поток предметов труда по технологическому маршруту с дискретно расположенным технологическим оборудованием. Этапы производства рассматриваются как изменение непрерывных переменных, описывающее состояние предметов труда в технологическом пространстве состояний. В отличие от реальной жидкости, переменные состояния не описывают физическое пространство, а обозначают степень завершенности части или стадии производства. В качестве переменной, определяющей расположение оборудования, при расчете поточных линий часто используют переменную  $\zeta$  (метр), представляющую путь, который проходит предмет труда в результате обработки с начальной технологической операции до текущей технологической операции при общей протяженности технологического маршрута  $D$  (метр) [22]. При этом в качестве переменной, определяющей темп обработки предметов труда вдоль технологического маршрута, принимается скорость (метр/час) движения предметов труда по технологическому маршруту поточной линии (для конвейерных линий – скорость движения конвейера). Система уравнений модели (1) представляется в виде:

$$\frac{dq(t, \zeta_m)}{dt} = \mu(t, \zeta_{m-1}) - \mu(t, \zeta_m), \quad m = 1..M, \quad \mu(0) = \lambda. \quad (2)$$

При количестве технологических операций в технологическом маршруте  $M \gg 1$  ( $M \approx 10^2$  [14],  $M \approx 250$  [8],  $M \approx 300$  [23, с.445]) для построения систем управления переходными производственными процессами использование Fluid-модели (1), (2) становится малоэффективным. Fluid-модели утрачивают преимущества перед TQ-моделями. Однако, факт наличия большого количества технологических операций  $M \gg 1$  позволяет осуществить предельный переход при  $(\zeta_m - \Delta\zeta_{m-1}) = \Delta\zeta \ll D$  к представлению системы уравнений (2) в виде нестационарной континуальной (непрерывной по координате пространства) модели поточной линии [8, с.4591]:

$$\mu(t, \zeta_m) = \mu(t, \zeta_{m-1}) + \frac{\partial \mu(t, \zeta)}{\partial \zeta} \bigg|_{\zeta=\zeta_m} \Delta\zeta_m + o(\Delta\zeta_m^2), \quad \frac{\partial \rho(t, \zeta)}{\partial t} \bigg|_{\zeta=\zeta_m} = - \frac{\partial \mu(t, \zeta)}{\partial \zeta} \bigg|_{\zeta=\zeta_m} + o(\Delta\zeta_m), \quad m = 1..M, \quad (3)$$

где  $\rho(t, \zeta_m) = q(t, \zeta_m) / \Delta \zeta_m$  [1,21] – усредненная плотность предметов труда в межоперационном заделе  $q(t, \zeta_m)$   $m$ -ой технологической операции для участка технологического маршрута  $[\zeta_{m-1}, \zeta_m]$ ,  $\mu(0) = \lambda$ . Функция  $\mu(t, \zeta)$  задана, определяет темп работы отдельных участков поточной линии. Тот факт, что производственные процессы являются не стационарными и стохастическими, затрудняет использование Fluid-моделей в системах управления поточными линиями, требует их дальнейшего совершенствования. Другой особенностью модели является то, что уравнения (3) необходимо дополнить уравнением состояния, определяющим функцию  $\mu(t, \zeta)$ . Фундаментом для построения уравнения состояния является механизм детального взаимодействия предметов труда с технологическим оборудованием. Это привело к необходимости использования для построения уравнения состояния DES-моделей со всеми описанными выше их недостатками. Применение эмпирических зависимостей, определяющих функцию  $\mu(t, \zeta)$ , для нестационарных переходных процессов оказались бесперспективными из-за своей сложности построения и недостаточной точности между численными и практическими результатами [6].

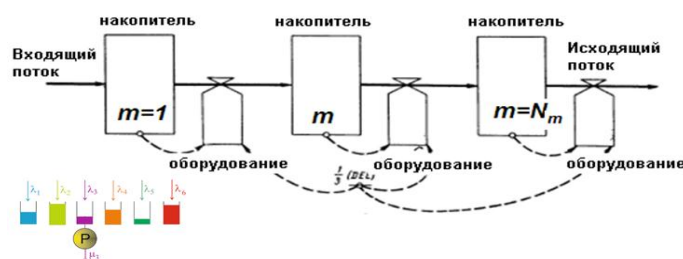


Рис. 3. Концептуальное представление Fluid-модели [6]  
Fig. 3. Conceptual view of Fluid-model [6]

Наряду с расчетом количественного распределения предметов труда вдоль технологического маршрута при заданной во времени интенсивности поступления заказов  $\mu(0) = \lambda$  и темпе выпуска готовой продукции  $\mu(D) = \mu_M$  представляет интерес задача определения для каждой технологической операции уровня запаса разных видов сырья и материалов, необходимого для обеспечения бесперебойной работы поточной линии. Данная задача планирования производства в классической постановке, сформулированной Modigliani F. и Hohn F. (1955) [24], определяет шаблон для интенсивности поступления ресурсов, необходимых для выполнения технологической операции. Модель производства, предложенная Modigliani F. и Hohn F., обеспечивала в дискретные моменты времени координацию действий различных частей производства с поставщиками сырья и потребителями готовой продукции. Общее потребление ресурсов на технологических операциях поточной линии связывалось с дискретными моментами времени, разделенными периодами планирования. Это позволило использовать упрощенные ограничения, которые накладывают отпечаток на поведение ресурсов в агрегированной модели оптимизации. Предложенный подход являлся доминирующим в научной литературе на протяжении десятилетий [15]. Однако, наличие проигнорированных ограничений при агрегировании сужает рамки применения моделей (Johnson L.A., Montgomery D.C.) [25], (Voß S., Woodruff D.L.).

**Модели с использованием функции ожидания** [26]. При постановке задач планирования производства возникает вопрос о масштабах времени планирования. Несмотря на то, что планирование производства осуществляется в дискретные моменты времени, планы фактически генерируются в непрерывном режиме времени в соответствии с поступившими заказами. В связи с этим Schneeweiss C. (2003) [27] предложил в качестве уравнения состояния производственной системы использовать функцию ожидания, обеспечивающую периодами времени поступления заказов и параметрами в модели планирования производства в дискретные моменты времени. В стационарных условиях ожидаемая длительность производственного цикла является нелинейной функцией использования ресурсов (Buzacott J.A., Shanthikumar J.G. [26], Hopp W.J. [18]).

Для построения нестационарных функций ожидания предложено использовать дискретные Fluid-модели. Дискретная Fluid-модель управляемого процесса «одно изделие – один технологический ресурс» представлена в виде:

$$I_i = I_{i-1} + R_i - D_i = I_{i-1} + X_i - D_i, \quad X_i = R_i, \quad (4)$$



где  $I_i$  - количество готовой продукции на период планирования  $\Delta t_i$ ,  $t_i = t_1 \dots t_T$ ,  $R_i$  - количество материала поступившего в периоде  $\Delta t_i$ ,  $D_i$  и  $X_i$  - спрос на продукцию и объем производства за период  $\Delta t_i$ . Балансовое соотношение (4) соответствует простейшему типу функции ожидания (время цикла много меньше периода планирования). Предполагается, что поступающий материал для обработки в период  $\Delta t_i$  доступен для использования в конце периода. Из-за небольшой продолжительности производственного цикла  $T_d$ ,  $T_d \ll \Delta t_i$  материал перерабатывается за период  $\Delta t_i$  и незавершенным производством (WIP) можно пренебречь. Когда длительность  $T_d$  превышает несколько периодов планирования, количество продукции на период планирования  $I_i$  становится зависимым от количества незавершенного производства. Объем производства  $X_i$  за период  $\Delta t_i$  связан с количеством материала  $R_{i-L}$ , поступившего в период  $\Delta t_{i-L}$ ,  $L = 1, 2, 3, \dots$

$$I_i = I_{i-1} + X_i - D_i = I_{i-1} + R_{i-L} - D_i, \quad X_i = R_{i-L}. \quad (5)$$

Балансовое уравнение (5) широко использовалось при планировании потребностей в материалах промышленных MRP-систем (Vollmann T.E., 2005) [15], (Vob S., Woodruff D.L., 2003) [28]. Хотя существуют модели (Hackman S.T., Leachman R.C., 1989) [29], в которой сроки поставки технологических ресурсов равны дробному числу периодов планирования, общим, как для теории, так и для производственной практики, является предположение о том, что время поставки соответствует целому числу периодов планирования. Большинство моделей вводят ограничения вида  $X_i \leq C_i$  на максимальный выпуск  $X_i$  за период планирования, где  $C_i$  - предельная мощность производства. В конце периода  $t_i$  производственная система имеет уровень незавершенного производства:

$$W_t = \sum_{n=i-L+1}^i R_n - \sum_{n=i+1}^{i+L} X_n \quad (6)$$

Материал, поступивший в период  $t_i$ , остается в системе в течение интервала времени  $\Delta t_i = (t_i - t_{i-L})$ . Общепринятая точка зрения на использование в дискретных Fluid-моделях MRP-систем ограничений производственных мощностей привела к задаче линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^N (h_i \cdot I_i + \sigma_i \cdot R_i) \rightarrow \min, \quad I_i = I_{i-1} + R_{i-L} - D_i, \quad R_{i-L} \leq C_i, \quad R_i \geq 0, \quad I_i \geq 0, \quad (7)$$

где  $h_i$  - стоимость единицы незавершенного производства,  $\sigma_i$  - стоимость единицы производственных ресурсов, используемых в момент времени  $t_i$ .

Norr W.J., Spearman M.L. [18], основываясь на детальной DES-модели взаимодействия отдельных предметов труда с оборудованием, представили в течение интервала планирования  $\Delta t_i$  зависимость производительности поточной линии от интенсивности поступления технологических ресурсов, необходимых для обработки изделий. При этом Liu J., Li C., Yang F., Wang H., Uzsoy R. [10] указывают на необходимость использования для решения задачи больших ресурсов машинного времени. Для глубокого детального изучения рассмотренных проблем требуются более производительные процессоры (Kasar N.). Применение данных моделей давало хорошее совпадение теоретических и практических данных при описании квазистационарных производственных процессов. Однако их возможность описывать нелинейные зависимости между темпом движения предметов труда по технологическому маршруту и длительностью производственного цикла при интенсивно используемых технологических ресурсах вызывала сомнения [14].

Основная проблема при определении масштабов времени  $\Delta t_i = (t_i - t_{i-L})$  заключается в том, что система планирования и управления производством при  $T_d \gg \Delta t_i$  требует оценки последствия влияния решений на состояние параметров производственной системы. При использовании фиксированных промежутков  $\Delta t = (t_i - t_{i-L})$  игнорируются эффекты, возникающие в пределах промежутка планирования. Достижения максимальной емкости накопителя межоперационных заделов в преде-

лах промежутка планирования приводило к остановке поточной линии, что ограничивало объем производства  $X_i$  за период  $\Delta t_i$ .

**Модели управляемых производственных процессов с использованием clearing-функции** [30,31]. Наличие однообразных задач планирования и управления производством, для решения которых применялись различные модели или их комбинации, привело к идее создания единой оптимизационной теории производственных систем с поточным способом организации производства, для построения которой Graves S.C. (1986) [30], Karmarkar U.S. (1989) [31] предложили использовать в качестве основных параметров состояния пропускную способность  $[\chi]_{CL}$  производственной системы, объем незавершенного производства  $W$  и длительность производственного цикла  $T_d$ . Для описания поведения параметров системы Karmarkar U.S. ввел уравнение состояния  $[\chi]_{CL} = \Phi(W)$  (рис.4), задающее связь между пропускной способностью и объемом незавершенного производства, получившее название clearing-функции [31]. Clearing-функция может быть определена для группы машин, оборудования, поточных линий, одного или нескольких заводов, включенных в единый производственный процесс. Clearing-функция  $[\chi]_{CL} = \Phi(W) = const$  ставит фиксированную границу выпуска продукции, предполагая мгновенное наращивание мощности производства, а  $[\chi]_{CL} = \Phi(W) = a \cdot W$ ,  $a = const$  [30] предполагает фиксированное время выхода производства на полную мощность, которая при наличии ограничения выпуска продукции для промежутка планирования  $\Delta t_i$ , известна как комбинированная clearing-функция (Karmarkar U.S., 1989) [31]. Важный класс составляют нелинейные clearing-функции, используемые для построения однопродуктовых моделей:

а) TQ-модель M/M/1 очереди для стационарного состояния (рис.5) [1]

$$[\chi]_{CL} = \Phi(W) = \frac{\mu \cdot W}{1 + W}, \quad (8)$$

б) модель фундаментальной диаграммы трафика для стационарного состояния

$$[\chi]_{CL} = \Phi(W) = \mu \cdot W - W^2, \quad (9)$$

в) модель G/M/1 очереди для стационарного состояния (Mehdi J., 1991) [1], (Berg R., 2004) [13, с.7]:

$$W = \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1 - \rho} + \rho, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad (10)$$

где  $c_a^2$  и  $c_s^2$  характеризуют среднеквадратичное отклонение поступления требований на изготовление изделий и времени их обработки,  $\mu$  - темп обработки предметов труда,  $\lambda$  - интенсивность поступления предметов труда на первую технологическую операцию [1]. Модель G/M/1 очереди для стационарного состояния (10) является развитием модели (8), движение предметов труда по технологическому маршруту с последовательным расположением технологического оборудования. Berg R. указал на то, что устойчивое состояние для модели (10) обеспечивается при выполнении условия  $\rho < 1$  [13, с.6]. При  $\lambda \rightarrow \mu$  межоперационные заделы бесконечно большие ( $W \rightarrow \infty$ ), а при  $\lambda > \mu$  уравнение (10) не может быть использовано, т.к. при его выводе предполагалось  $\rho = (\lambda/\mu) < 1$ . Решение (10) относительно  $\rho < 1$  описано в [1]:

$$\rho = \frac{\sqrt{(W+1)^2 + 4W(c^2 - 1)} - (W+1)}{2(c^2 - 1)}, \quad \text{при} \quad c = \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} > 1. \quad (11)$$

При  $c \rightarrow 1$  модель M/M/1 очереди (8) является предельным случаем модели (10):

$$\lim_{c \rightarrow 1} \rho = \frac{W}{(W+1)}, \quad \lim_{c \rightarrow 1} [\chi]_{CL} = \frac{\mu \cdot W}{1 + W} \quad (12)$$





Рис. 4. Clearing-функция производственной системы [31]

Fig. 4. Clearing-function production system [31]

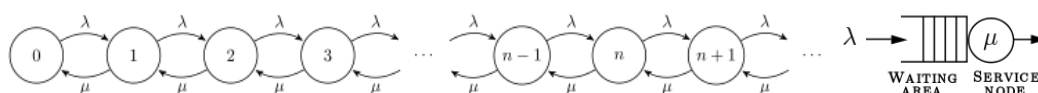


Рис. 5. Схема M/M/1-модели очереди поточной линии

Fig. 5. Model M/M/1 queue production line

Asmundsson J.M (2006) [32] предложил распределенные АС-функции (allocated clearing function) для моделирования многопродуктовых линий. АС-функции предполагают, что производится совокупный продукт, агрегирующий в себе технологические ресурсы для производства отдельных продуктов. Альтернативным подходом является представление clearing-функции в виде суммы clearing-функций отдельных продуктов. Экспериментальные данные свидетельствуют об удовлетворительных результатах использования АС-функций для продуктов, схожих по характеру потребления ресурсов. Интенсивности потребления ресурсов при этом выражаются в единицах времени обработки [1]. Однако, если модели переноса ресурсов для каждой номенклатуры предметов труда являются сложными, использование АС-функций не позволяет описать производственные процессы. Selçuk B., Fransoo J.C., Gok A.G. (2007) аппроксимировали clearing-функцию кусочно-линейной функцией [1], что позволило использовать для оптимизации параметров поточной линии аппарат линейного программирования. Clearing-функция может быть получена как аналитически так и численно с использованием TQ-моделей, DES-моделей, Fluid-моделей производственных систем или определена эмпирически. Selçuk, B., Fransoo J.C., Gok A.G. (2007) [1] представили методику построения переходных clearing-функций аналитически. В связи с тем, что оперативная информация о выпуске продукции и о состоянии незавершенного производства на предприятии является закрытой, то в большинстве исследований для построения clearing-функции вместо эмпирических данных используется TQ- и DES-модели. Исключением являются работы Haeussler S., Missbauer H. (2012) [1], в которых для построения clearing-функции применены полученные с производственной линии цифровые носители. Kasar N. (2012) использовал для построения clearing-функции оптимизированные параметры поточной линии. Вычислительные эксперименты, связанные с расчетом параметров поточных линий компании Intel, показали хорошее приближение расчетных и экспериментальных данных для установившихся процессов [1].

Несмотря на то, что clearing-функция является удачным инструментом для определения мгновенной связи между пропускной способностью производственной системы и объемом незавершенного производства, наличие ограниченного количества параметров, входящих в уравнение состояния, не позволяет эффективно моделировать временное изменение параметров производственного процесса, обусловленное факторами обработкой изделий (Armbruster D, Kempf K., 2012) [1]. Попытки создания нестационарных clearing-функций ограничены специальными теоретическими уточнениями и экспериментальными исследованиями (Fonteijs J., Wienke M., 2012) [1]. В качестве уточнения Lefebvre E. (2008) [20] вводит в clearing-функцию  $[\chi]_{CL} = \Phi(W(t - \tau_0))$  эффективное время

обработки  $\tau_0 = \sum_{m=0}^M \mu_m^{-1}$  (основное технологическое время) предметов труда на технологических

операциях [13]. Missbauer H (2009) предпринял попытки расширить применение clearing-функции на переходные производственные процессы. При этом обращалось внимание на существенную зависимость пропускной способности производственной системы от начального распределения предметов труда по технологическому маршруту и необходимости обеспечения условий перехода производственной системы из одного стационарного устойчивого состояния в другое. Производственные процессы являются стохастическими [21,33], но несмотря на это при построении clearing-функций практически не уделено внимание исследованию устойчивости потоковых параметров производ-



ственных линий, отсутствуют оценки времени затухания случайных возмущений потоковых параметров и оценки их абсолютных величин. Исследования поточной линии Intel по производству полупроводниковых изделий, проведенные Armbruster D., Kempf K.G. (2012) [1] показали, что повседневные стохастические факторы возмущения параметров производства имеют время затухания от 1-2 дней до недели, что требует наличие страховых запасов до 20% от нормативного количества. Предположение о квазистационарности переходного процесса является значительным ограничением для широкого применения уравнения состояния (clearing-функции) в аналитическом виде, построенного в основном с использованием TQ-моделей.

**Модели производственных процессов, использующие уравнения в частных производных. PDE-модели** [8]. В современной литературе выделились основные три типа моделей и их комбинации для вывода уравнения состояния, определяющего связь потоковых параметров производственных линий. Это модели массового обслуживания (TQ-model), дискретно-событийные модели (DES-model) и Fluid-модели [1]. Каждый тип моделей имеет свои преимущества, но ни один из них не подходит в полной мере для моделирования как установившихся, так и переходных процессов функционирования производственной системы [13, с.2]. Существующие TQ-модели описывают поточные линии в стационарном режиме [17]. Использование их при описании переходных процессов приводит к чрезмерному усложнению и большим затратам машинного времени. DES-модели используются для описания поточных линий в переходном и стационарном режиме, но являются дискретными и требуют больших затрат машинного времени. Fluid-модели ориентированы на малое количество интервалов разбиения технологического маршрута и линейные стационарные решения в рамках заданного интервала. Требование повышения точности модели приводит к увеличению количества интервалов обобщения и к усложнению модели в связи с увеличением размерности системы дифференциальных уравнений (1) (Kefeli A., Uzsoy R., 2011).

В последнее десятилетие при проектировании производственных поточных линий используются модели, описывающие поведение производственной системы с помощью уравнений в частных производных (PDE-model) [1,9,13,20,21]. Введенный класс моделей объединил преимущества TQ-моделей, DES-моделей и Fluid-моделей, значительно расширил возможности проектирования систем управления поточными линиями. PDE-модели в общем случае являются непрерывными, могут быть успешно использованы при описании стационарных и переходных режимов работы поточной линии, не требуют больших затрат машинного времени [1].

Ключевым вопросом при построении PDE-модели поточных линий является выбор системы координат. Распространенным подходом является использование в качестве переменной, определяющей место обработки предмета труда на технологическом маршруте, стоимости  $S$  (грн.) перенесенных технологических ресурсов на предмет труда (Дабагян А.В., 2008) [1], (Федюкин В.К., 2004)  $S \in [0, S_d]$  ( $S_d$  (грн)- себестоимость изготовления продукции), эффективного времени обработки

предмета труда  $\tau_m$  (час),  $\tau_m \in [0, \tau_M]$  (Eekelen J., 2006), (Ramadge P., Wonham W.) [1] ( $\tau_M = \sum_{m=1}^M \Delta\tau_m$

(час)-общее эффективное время обработки предмета труда,  $\Delta\tau_m$ -среднее время обработки предмета труда на  $m$ -ой технологической операции ) или степени незавершенности изготовления изделия  $x$  (Armbruster D., Ringhofer C., Berg V., Lefebvre E., 2004) [1],  $x \in [0, 1]$ . Под степенью незавершенности изготовления изделия  $x$  понимается позиция предмета труда в технологическом маршруте, которая может быть представлена как отношение среднего времени  $\Delta\tau_m$  обработки предмета труда к его общему времени обработки  $\tau_M$  [13, с.16]. Для предмета труда, прошедшего обработку на  $m$ -ой операции, можно записать  $x = \frac{\tau_m}{\tau_M} = \left( \sum_{k=1}^m \Delta\tau_k / \sum_{k=1}^M \Delta\tau_k \right)$ . Каждому времени обработки  $\tau_m = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_k$  одно-

значно соответствует стоимость ресурсов  $S_m = S(\tau_m)$ , перенесенных на предмет труда, а общему времени  $\tau_M$  - себестоимость  $S_d = S(\tau_M)$ . Таким образом, степень незавершенности изготовления изделия  $x$  может быть определена через время обработки  $\tau$  или стоимость перенесенных затрат  $S = S(\tau)$  на предмет труда. Целесообразно при моделировании производственной поточной линии с

одним обобщенным технологическим ресурсом использовать безразмерную переменную  $x = \frac{S_m}{S_M}$ ,

определяющую позицию предмета труда в технологическом маршруте [3],  $x \in [0, 1]$ . Безразмерная

переменная  $x = \frac{\tau_m}{\tau_M}$  используется в случае, когда модель поточной линии не рассматривает при



переноса на предмет труда структуру ресурсов (Armbruster D., Ringhofer C.) [1]. Для модели поточной линии, которая учитывает в результате выполнения технологической операции потребление несколько взаимосвязанных между собой технологических ресурсов, на использование которых наложены ограничения, применение безразмерной переменной  $X$  является затруднительным. Если ввести функцию плотности предметов труда  $\rho(t, x)$  в состоянии  $x$  в момент времени  $t$ , то общее количество предметов труда, находящихся в различных стадиях готовности есть величина (Armbruster D., Ringhofer C.) [1,20,21]:

$$W(t) = \int_0^1 \rho(t, x) dx, \quad x \in [0, 1] \quad (13)$$

Так как процесс обработки предметов труда является стохастическим, то в результате выполнения операции предмет труда может находиться в том или ином состоянии [8, с.4544]. Это позволило записать усредненную плотность предметов труда  $\rho(t, x)$  (шт.) и поток предметов труда  $F(t, x)$  (шт./час) по технологическому маршруту через функцию распределения предметов труда  $f(t, r, x)$  по состояниям  $r = \Delta \tau_m^{-1}$  (Armbruster D., Ringhofer C., 2005) [1]:

$$\rho(t, x) = \int_0^{\infty} f(t, r, x) dr, \quad F(t, x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{r} f(t, r, x) dr \quad (14)$$

Положение предмета труда в пространстве состояний характеризуется точкой с координатами  $(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n)$ , которые определяют количественное значение параметров предмета труда. Пространство состояний используется при построения моделей многопоточных линий, потребляющих в ходе производства несколько ресурсов. Использование в одномерном описании безразмерной переменной  $X$  [1, 3] для углубленного исследования изменения состояния предмета труда является затруднительным. Напротив, применение в качестве переменной модели параметра  $S$ , характеризующего технологическую позицию обработки предмета труда через стоимость позволяет применить детально разработанный математический аппарат производственных функций [21], что дает возможность суммировать ресурсы путем суммирования их стоимостей. Однако, несмотря на раскрывающиеся перспективы в связи с использованием стоимостного представления изменения состояния предмета труда, подавляющее большинство авторов (Armbruster D., Ringhofer C. (2005), Berg R., Lefebvre E., Rooda J. (2008) [13], Wienke M., Fontijn J., (2012), Kempf K., (2012) [16]), применяют PDE-модели поточных линий без ограничений на потребление технологических ресурсов, вводят для описания состояния предмета труда переменные состояния  $(r, x)$ .

В PDE-модели поток предметов труда  $F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x)$  (пропускная способность поточной линии) представляется в виде произведения плотности  $\rho(t, x)$  предметов труда и скорости  $v(t, x)$  их движения [33]. Предполагая, что дефектные предметы труда отсутствуют (нет источников и стоков), движение предметов труда по технологическому маршруту удовлетворяет закону сохранения:

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda - \mu, \quad Q(t) = W(t) = \int_0^1 \rho(t, x) dx, \quad (15)$$

где  $\lambda$  – интенсивность поступление предметов труда на первую технологическую операцию,  $\mu$  – выпуск продукции [1]. Уравнение (15) является интегральной формой закона сохранения количества предметов труда, находящихся в процессе обработки, может быть представлено в дифференциальном виде [1]:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial S} = 0, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x). \quad (16)$$

Граничное условие  $F(t, 0) = \lambda(t)$  задает поток заготовок на первую операцию. Профиль незавершенного производства в начальный момент времени определяется условием  $\rho(0, S) = \rho_0(S)$ , которое характеризует распределение заготовок по технологическим операциям поточной линии. Для свободной поточной линии  $\rho(0, S) = 0$ . Уравнение (16) обеспечивает взаимосвязь во времени плотности  $\rho(t, x)$  распределения предметов труда и темпа их движения  $F(t, x)$  (пропускной способности поточной линии) для каждой точки  $x$  технологического маршрута [21]. Неравномерность распреде-

ления незавершенного производства вдоль маршрута обусловлена разными эффективными временами обработки предметов труда на каждой операции. Неравномерность в производительности оборудования вдоль технологического маршрута определяет динамику изменения плотности предметов труда, что существенным образом влияет на пропускную способность линии. Модели производственного процесса, содержащие уравнение (16) учитывают влияние внутренних факторов на пропускную способность, а также ограничения, определяемые максимальной производительностью оборудования и емкостью межоперационных накопителей. Это позволило PDE-моделям составить значительную конкуренцию DES-моделям, преимущество которых в том, что они допускают решение в аналитическом виде и не требуют значительных вычислительных ресурсов. Трудность построения PDE-моделей определяется тем, что балансовые уравнения вида (16) незамкнуты [13, 21, 33]. Для замыкания уравнение (16) дополняется уравнением состояния. Если уравнение состояния зада-

но линейной clearing-функцией  $\Phi(W) = \int_0^1 F(t, x) dx = c \int_0^1 \rho(t, x) dx = c \cdot W$ , (Constant Proportion, Graves S.C., 1986, [30]) (рис.4), то система уравнений PDE-модели:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial S} = 0, \quad v(t, x) = c = \text{const}, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot c \quad (17)$$

допускает аналитическое решение. Если скорость движения предметов труда вдоль технологического маршрута постоянна  $v(t, x) = c$ , то для единичного потока предметов труда, поступающего в момент времени  $t=0$  на первую технологическую операцию поточной линии, уравнения (17) имеет решение:

$$c \cdot \rho(t, x) = H(c \cdot t - x) = \begin{cases} 0, & t < x/c, \\ 1, & t \geq x/c, \end{cases} \quad \lambda(t) = H(t). \quad (18)$$

Встроенная в модель величина  $\tau = c^{-1}$  определяет длительность задержки между временем поступления сырья на первую операцию и временем выхода готового продукта. Постоянной скорости движения предметов труда по технологическому маршруту соответствует постоянное время задержки  $\tau$ . Связь потока предметов труда представлена линейной зависимостью. Следующая PDE-модель (Lighthill–Whitham) [1] использует уравнения состояния в виде нелинейной зависимости потока  $F(\rho)$  предметов труда от плотности  $\rho$ :

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 0, \quad F(\rho) = \rho \cdot v(\rho) = \rho \cdot v_0 \left(1 - \frac{\rho}{R}\right), \quad \frac{\rho}{R} \leq 1. \quad (19)$$

Широкое распространение получили PDE-модели поточных линий, содержащие стационарные уравнения состояния. Для завода, уравнение состояния поточной линии которого представлено М/М/1-моделью очереди размером  $W(t)$ , параметры  $\lambda, \mu, W$  (15) и длительность производственного цикла  $T_d = (1+W)/\mu$  для стационарного состояния определяются зависимостью (Gross D., Harris C.) [17]:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot W}{1+W}, \quad \text{где} \quad T_d = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad W = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad W(t) = \int_0^1 \rho(t, x) dx. \quad (20)$$

Скорость движения предметов труда  $v(t, x)$  и локальный поток  $F(t, x)$  для М/М/1- модели выражаются через интенсивность выпуска продукции  $\mu$  [13]

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial S} = 0, \quad v(t, x) \approx \frac{\mu}{1+W}, \quad F(t, x) = \rho(t, x) \cdot v(t, x) \approx \frac{\mu \cdot \rho(t, x)}{1+W}. \quad (21)$$

Уравнение состояния  $F(t, x)$  в интегральной форме для устойчивого режима работы поточной линии (Armbruster D., Fonteijn J., Wienke M., 2012) имеет вид [1]

$$F(t, W) = \int_0^1 F(t, x) dx = \frac{\mu \cdot W}{1+W} \quad (22)$$

М/М/1-модели clearing-функции (6). Предприняты попытки построить совершенные PDE-модели поточных линий, уточняющие уравнения состояния путем использования экспериментальных измерений на заводе, детальной имитационной модели или TQ-моделей [1]. Широко применяются при исследовании поточных линий модели:

$$F(t, x) = \Phi(\rho) = \frac{\mu_0}{1 + \rho(t, x)} \cdot \rho(t, x), \quad F(t, x) = \frac{\mu_0}{1 + \rho(t, x) + k \cdot \rho(t, x)(1 - x)}, \quad (23)$$

$$F(t, x) = k_1 \cdot (1 - e^{k_2 \cdot W}), \quad F(t, x) = \frac{k_1 \cdot W}{k_2 + W}, \quad (24)$$

$$F(t, x) = \frac{1 - x}{\tau(t, x) \left( \int_0^1 \rho(t, z) dz - x \cdot \tau_0 \right)} \cdot \rho(t, x), \quad \tau(t, x) = \frac{1}{\mu}, \quad (25)$$

которые предложили D.Armbruster, K.Kempf (2012) (23), J.Asmundsson., R.Uzsoy (24), Ringhofer C (2012) (25).  $\tau(t, x)$  – время, требуемое для завершения производства предметов труда, находящихся на стадии  $x$ ;  $k, k_1, k_2$  – технологические коэффициенты;  $M$ -характеристика максимальной емкости накопителя.

Детальный анализ функционирования полупроводниковой поточной линии с применением PDE-модели (сплошная линия) и DES-модели (затенение) выполнили Perdaen D. (2008), Lefebvre E. (2010) [1]. Характерное поведение выходного потока предметов труда, рассчитанного с помощью PDE-модели и DES-модели, представлено на рис.6 (Lefebvre E., 2010). Принципиальным недостатком методов, использующих DES-модели, является чрезвычайно большое количество вычислений для сложных производственных систем, таких как полупроводниковые поточные линии [14]. Именно в этой области применение PDE-моделей предлагают самые высокие перспективы для проектирования систем управления поточными линиями. Эти методы способны оптимально сочетать точность DES-моделей при применении гораздо менее производительных процессоров [13]. Использование в PDE-моделях clearing-функции проявляло значительные перспективы на ранней стадии их развития. Растущий объем публикаций, связанных с развитием и уточнением уравнения состояния для PDE-моделей свидетельствует о том, что дальнейшее развитие подхода с использованием clearing-функций является не эффективным. Необходимо развивать статистические методы, позволяющие строить многомоментные PDE-модели для переходных режимов, в которых для замыкания использовано нестационарное уравнение, в основанное на детальном механизме взаимодействия предметов труда между собой и оборудованием.

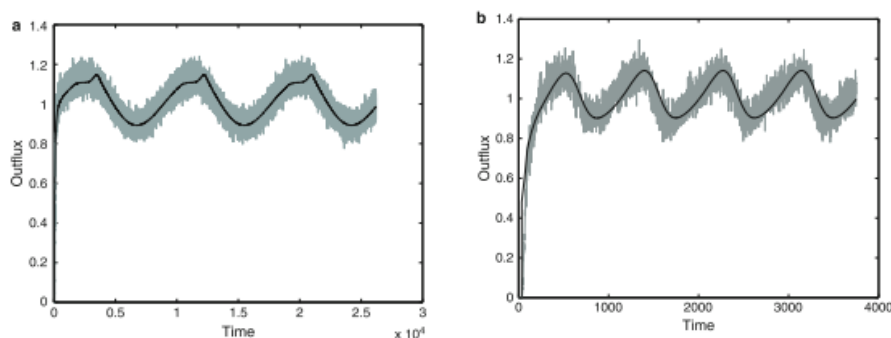


Рис. 6. Сравнение решений PDE-модели и DES-модели, Lefebvre E. 2010  
Fig. 6. Comparison of PDE-model and DES-model, Lefebvre E. 2010

**Кинетические модели управляемых производственных процессов** [3, 21, 34]. В серии работ Armbruster D., Ringhofer C., Lefebvre E., Kempf K. [1, 9, 16] представили кинетические модели поточных линий. Armbruster D., Ringhofer C. (2004) вводят функции распределения  $f(x, v, t)$  предметов труда по состояниям, характеризующую количество деталей в состоянии  $x$  в момент времени  $t$ . Типичный подход, с помощью которого определяется эволюция функции распределения предметов труда по состояниям, заключается в выводе замкнутых уравнений для моментов функции распределения. Построение PDE-моделей с использованием кинетической теории, содержит иерархический набор уравнений. Это позволяет выйти за пределы применимости квазистатистических моделей. Предложенный Н.Н.Боголюбовым метод, основанный на выборе малого параметра, позволяет обрезать количество уравнений на нужном уровне. С использованием кинетического подхода записаны уравнения для первых моментов функции распределения предметов труда  $f(x, v, t)$  (Armbruster D., Ringhofer C.) [35, с.819]:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, x) \cdot v(t, x)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + v(t, x) \cdot \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (26)$$

$$\rho(t, 0) \cdot v(t, 0) = \lambda(t), \quad v(t, 1) = \frac{\mu}{1 + W(t)} \quad (27)$$

$$\frac{dv(t, 0)}{dt} = -\sigma \left( v(t, 0) - \frac{\mu}{1 + W(t)} \right), \text{ при } \lambda < \mu, \quad v(t, 0) = \frac{\mu}{0,5 + W(t)}, \text{ при } \lambda \geq \mu. \quad (28)$$

с граничными условиями (27) М/М/1-модели, полученной для установившегося устойчивого режима, где  $\sigma$  – экспериментальная величина. Интегрирование первого уравнения (26) по  $x$  позволяет записать уравнение:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \rho(t, 0) \cdot v(t, 0) - \rho(t, 1) \cdot v(t, 1) = \lambda(t) - \lambda \left( t - \frac{1}{c} \right), \quad (1.29)$$

которое получил Lefebvre E. (2008) [1] из весьма общих соображений. Известно из практических исследований, что выход с обработки первого изделия партии происходит через некоторое время задержки относительно времени поступления партии на обработку [21]. При переходе от  $\rho(t, x)$  к агрегированной переменной Fluid-модели  $W(t)$  (15) влияние неравномерного распределения предметов труда вдоль технологического маршрута [5] и наличие ограничений емкости накопителей не учитывается. Результаты расчетов потоковых параметров поточной линии, полученные с использованием модели (26)–(28), более приближены к экспериментальным данным, чем результаты расчетов с использованием М/М/1-модели (8), G/M/1-модели (1.10), непрерывной Fluid-модели (15) (Fonteyn J., Missbauer H.), хотя, как утверждает Armbruster D. (2012), детальное изучение приближений, связанных уравнениями (26)–(28), на текущий момент не сделано. Не ясным остался вопрос, для каких производственных систем та или иная модель является наиболее удачной. Наиболее существенные проблемы, возникающие при построении кинетических моделей производственных систем, заключаются в том, что кинетическое уравнение является интегро-дифференциальным, решение которого представляется сложной математической задачей [34]. В виду сложности закона воздействия оборудования на предмет труда, кинетическое уравнение не может быть записано в точном виде для конкретных производственных процессов. Даже при простых предположениях о характере воздействия оборудования на предмет труда не удается получить решения в точном аналитическом виде. В связи с этим приобретают особое значение построение эффективных методов приближенного решения кинетического уравнения производственной линии.

### Выводы

Представлен обзор основных моделей, которые использованы при проектировании систем управления поточными производственными линиями. Рассмотрены области применения моделей и ограничения, которые не позволяют их эффективно использовать для проектирования систем управления. Уделено значительное внимание новым типам моделей – кинетическим и моделям, содержащим уравнения в частных производных (PDE-моделям). Проведен анализ использования моделей для наиболее простых случаев функционирования производственных поточных линий. Обоснованность применения определялась сравнительным анализом результатов, полученных с помощью DES-модели и исследуемой PDE-моделью. Показано, как для построения PDE-моделей использованы статистические методы описания больших систем. При этом общий характер статистических закономерностей не зависит от того, каким способом описывается поведение отдельного предмета труда. Использование статистического подхода позволяет получить замкнутые многомоментные балансовые уравнения (уравнения переноса) не из феноменологических соображений, а исходя из законов движения отдельных предметов труда по технологическому маршруту, определенных технологией производства. Развитие и использование PDE-моделей требует решения вопросов: 1. Вывод нестационарных уравнений состояния, основанных на детальной технологии обработки предмета труда с учетом схемы оборудования. 2. Построение многомоментных замкнутых балансовых моделей для установившихся и переходных нестационарных режимов функционирования производственной линии. 3. Построение двухуровневых моделей управления параметрами производственной линии для установившихся и переходных режимов с учетом параметров оборудования, схемы его расстановки и приоритетов движения предметов труда



### Список литературы References

1. Пигнастый О. М. О новом классе динамических моделей поточных линий производственных систем / О. М. Пигнастый // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Белгород: БГУ. - 2014. - № 31/1. - С. 147-157.
- Pignastyj O. M. O novom klasse dinamicheskikh modelej potochnyh linij proizvodstvennyh si-tem / O. M. Pignastyj // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Belgorod: BGU. - 2014. - № 31/1. - S. 147-157.
2. Демуцкий В.П. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. / Демуцкий В. П., Пигнастая В. С., Пигнастый О. М. - Х.: ХНУ, 2003. - С. 272.
- Demuckij V.P. Teorija predprijatija: Ustojchivost' funkcionirovanija massovogo proizvodstva i prodvizhenija produkcii na rynek. / Demuckij V. P., Pignastaja V. S., Pignastyj O. M. - H.: HNU, 2003. - С. 272.
3. Armbruster D. Kinetic and fluid model hierarchies for supply chains supporting policy attributes / D. Armbruster., D. Marthaler, C. Ringhofer // Bulletin of the Institute of Mathematics. - Academica Sinica. - 2006. - P. 496 - 521.
- Armbruster D. Kinetic and fluid model hierarchies for supply chains supporting policy attributes / D. Armbruster., D. Marthaler, C. Ringhofer // Bulletin of the Institute of Mathematics. - Academica Sinica. - 2006. - P. 496 - 521.
4. Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов / Н. П. Бусленко. - М.: Наука, 1964. - 363 с.
- Buslenko N. P. Matematicheskoe modelirovanie proizvodstvennyh processov / N. P. Buslenko. - M.: Nauka, 1964. - 363 s.
5. Первозванский А. А. Математические методы в управлении производством / А. А. Первозванский. - М.: Наука, 1975. - 616 с.
- Pervozvanskij A. A. Matematicheskie metody v upravlenii proizvodstvom / A. A. Pervozvanskij. - M.: Nauka, 1975. - 616 s.
6. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия / Дж. Форрестер. - М.: Прогресс, 1961. - 341 с.
- Forrester Dzh. Osnovy kibernetiki predprijatija / Dzh. Forrester. - M.: Progress, 1961. - 341 s.
7. Шкурба В. В. Планирование дискретного производства в условиях АСУ / В. В. Шкурба, В. А. Болдырева, А. А. Вьюн и др. / под ред. В. М. Глушкова. - К.: Техника, 1975. - 296 с.
- Shkurba V. V. Planirovanie diskretnogo proizvodstva v usloviyah ASU / V .V. Shkurba, V .A. Boldyreva, A. A. V'jun i dr. / pod red. V. M. Glushkova. - K.: Tehnika, 1975. - 296 s.
8. Armbruster D. Continuous models for production flows.. / D. Armbruster, C. Ringhofer., Jo T- J. // In Proceedings of the 2004 American Control Conference. - Boston, MA, USA. - 2004. - P. 4589 - 4594.
- Armbruster D. Continuous models for production flows.. / D. Armbruster, C. Ringhofer., Jo T- J. // In Proceedings of the 2004 American Control Conference. - Boston, MA, USA. - 2004. - P. 4589 - 4594.
9. Ankenman B. E. Simulation in planning: Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise. / B. E. Ankenman, J. M. Bekki, J. Fowler et al. // A State of the Art Handbook New York: Springer-Verlag. - 2010. - Vol. 151. - P. 565-592.
- Ankenman B. E. Simulation in planning: Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise. / B. E. Ankenman, J. M. Bekki, J. Fowler et al. // A State of the Art Handbook New York: Springer-Verlag. - 2010. - Vol. 151. - P. 565-592.
10. Liu J. Production planning for semiconductor manufacturing via simulation optimization / J.Liu, C.Li, F.Yang, R.Uzsoy, S.Jain, R.Creasey// Simulation Conference (WSC) - New York: IEEE. -2011. - P. 256 - 322.
- Liu J. Production planning for semiconductor manufacturing via simulation optimization / J.Liu, C.Li, F.Yang, R.Uzsoy, S.Jain, R.Creasey// Simulation Conference (WSC) - New York: IEEE. -2011. - P. 256 - 322.
11. Lu S.R. Efficient scheduling policies to reduce mean and variance of cycle time in semiconductor plants / Lu S., Ramaswamy D., Kumar P.R. // IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing - 1994. №7(3). - P. 374 - 388.
- Lu S.R. Efficient scheduling policies to reduce mean and variance of cycle time in semiconductor plants / Lu S., Ramaswamy D., Kumar P.R. // IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing - 1994. №7(3). - P. 374 - 388.
12. Dauzere-Peres S. On the importance of sequencing decisions in production planning and scheduling. / S.Dauzere-Peres, J. Lasserre // Journal International Transactions in Operational Research. - 2006. - №9. - P. 779 - 793.
- Dauzere-Peres S. On the importance of sequencing decisions in production planning and scheduling. / S.Dauzere-Peres, J. Lasserre // Journal International Transactions in Operational Research. - 2006. - №9. - P. 779 - 793.
13. Berg R. Partial differential equations in modelling and control of manufacturing systems / R. Berg. - Netherlands, Eindhoven Univ. Technol., 2004. - 157 p.
- Berg R. Partial differential equations in modelling and control of manufacturing systems / R. Berg. - Netherlands, Eindhoven Univ. Technol., 2004. - 157 p.
14. Lefebvre E. Modeling, Validation and Control of Manufacturing Systems / E.Lefebvre, R.A.Berg, J.E. Rooda // - Proceeding of the 2004 American Control Conference. -Massachusetts. - 2004. - P. 4583 - 4588.



- Lefebber E. Modeling, Validation and Control of Manufacturing Systems / E.Lefebber, R.A.Berg, J.E. Rooda // – Proceeding of the 2004 American Control Conference. –Massa- chusetts. – 2004. – P. 4583 – 4588.
15. Vollmann T.E. Manufacturing Planning and Control for Supply Chain Management. / T.E.Vollmann, L.Berry, F.R.Jacobs // New York: McGraw-Hill.–2005. – P. 520.
- Vollmann T.E. Manufacturing Planning and Control for Supply Chain Management. / T.E.Vollmann, L.Berry, F.R.Jacobs // New York: McGraw-Hill.–2005. – P. 520.
- 16.Kempf K.G. Simulating Semiconductor Manufacturing Systems / K.G. Kempf // Winter Simulation Conference, Institute of Electrical and Electronics Engineers – Piscataway, New Jersey, – 1996. – P. 3 – 11.
- Kempf K.G. Simulating Semiconductor Manufacturing Systems / K.G. Kempf // Winter Simulation Conference, Institute of Electrical and Electronics Engineers – Piscataway, New Jersey, – 1996. – P. 3 – 11.
17. Gross D. Fundamentals of Queueing Theory. / D.Gross, C.M.Harris. – New York: Wiley, 1985. – 587 p.
- Gross D. Fundamentals of Queueing Theory. / D.Gross, C.M.Harris. – New York: Wiley, 1985. – 587 p.
18. Hopp W.J. Factory Physics: Foundations of Manufacturing Management. / W. J. Hopp, M.L. Spearman. – Boston: Irwin. McGraw-Hill, 2001. – P. 698.
- Hopp W.J. Factory Physics: Foundations of Manufacturing Management / W. J. Hopp, M.L. Spearman. – Boston: Irwin. McGraw-Hill, 2001. – P. 698.
- 19.Lefebber E. Modeling and Control of Manufacturing Systems / E.Lefebber // Decision Policies for Production Networks. – 2012.– P.9-30.
- Lefebber E. Modeling and Control of Manufacturing Systems / E.Lefebber // Decision Policies for Production Networks. – 2012.– P.9-30.
- 20.Пигнастый О. М. Континуальні моделі прогнозування виробничного функціонування поточних ліній / О. М. Пигнастый, В. Я. Заруба // Сучасні концепції прогнозування розвитку складних соціально-економічних систем. - Бердянськ: Видавець Ткачук О.В. - 2013. - С. 74-89.
- Pignastyj O. M. Kontinual'ni modeli prognosuvannja virobничого funkcionuvannja potocnih linij / O. M. Pignastyj, V. Ja. Zaruba // Suchasni koncepcii prognosuvannja rozvitku skladnih social'no-ekonomichnih sistem. - Berdjansk: Vidavec' Tkachuk O.V. - 2013. - S. 74-89.
21. Пигнастый О. М. Статистическая теория производственных систем / О. М Пигнастый. - Харків: ХНУ, 2007. - 388 с.
- Pignastyj O. M. Statisticheskaja teorija proizvodstvennyh sistem / O. M Pignastyj. - Harkiv: HNU, 2007. - 388 s.
22. Соколицын С. А. Применение математических методов в экономике и организации машиностроительного производства / С. А. Соколицын. – Л.: Машиностроение, 1970. – 345 с.
- Sokolicyn S. A. Primenenie matematicheskikh metodov v jekonomike i organizacii mashinostroitel'nogo proizvodstva / S. A. Sokolicyn. – L.: Mashinostroenie, 1970. – 345 s.
23. Tian F. An iterative approach to item-level tactical production and inventory planning. / F.Tian, S.P.Willems, K.G.Kempf // International Journal of Production Economics. – 2011. – №133. – P. 439 – 450.
- Tian F. An iterative approach to item-level tactical production and inventory planning. / F.Tian, S.P.Willems, K.G.Kempf // International Journal of Production Economics. – 2011. – №133. – P. 439 – 450.
- 24.Modigliani F. Production planning over time and the nature of the expectation and planning / F.Modigliani, F.Hohn// Econometrica №23. – New York, 1955. – P. 46 – 66.
- Modigliani F. Production planning over time and the nature of the expectation and planning / F.Modigliani, F.Hohn// Econometrica №23. – New York, 1955. – P. 46 – 66.
- 25.Johnson L.A. Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control / L.A. Johnson, D.C. Montgomery. – New York: Wiley, 1974. – 544 p.
- Johnson L.A. Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control / L.A. Johnson, D.C. Montgomery. – New York: Wiley, 1974. – 544 p.
- 26.Buzacott J. A. Stochastic Models of Manufacturing Systems. / J. A. Buzacott, J. G. Shanthikumar. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993. – 403 p.
- Buzacott J. A. Stochastic Models of Manufacturing Systems. / J. A. Buzacott, J. G. Shanthikumar. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993. – 403 p.
27. Schneeweiss C. Distributed Decision Making. / C. Schneeweiss. – Berlin: Springer-Verlag, 2003. –508 P.
- Schneeweiss C. Distributed Decision Making. / C. Schneeweiss. – Berlin: Springer-Verlag, 2003. –508 P.
- 28.Vob S. Introduction to Computational Optimization Models for Production Planning in a Supply Chain / S. Vob, D. L. Woodruff // Berlin: Springer – Verlag. –2003. – 261 p.
- Vob S. Introduction to Computational Optimization Models for Production Planning in a Supply Chain / S. Vob, D. L. Woodruff // Berlin: Springer – Verlag. –2003. – 261 p.
- 29.Hackman S.T. A general framework for modeling production / S.T.Hackman, R.C. Leachman // Management Science. – 1989. – №4. – P. 478 – 495.
- Hackman S.T. A general framework for modeling production / S.T.Hackman, R.C. Leachman // Management Science. – 1989. – №4. – P. 478 – 495.
30. Graves S.C. A tactical planning model for a job shop. Operations Research 34 (4). /S.C. Graves – New York,1986. – P. 522 – 533.
- Graves S.C. A tactical planning model for a job shop. Operations Research 34 (4). /S.C. Graves – New York,1986. – P. 522 – 533.
31. Karmarkar U.S. Capacity Loading and Release Planning with Work-in-Progress (WIP) and Leadtimes / U.S. Karmarkar // Journal of Manufacturing and Operations Management. –№2. –1989. – P.105-123.





Karmarkar U.S. Capacity Loading and Release Planning with Work-in-Progress (WIP) and Leadtimes / U.S. Karmarkar // Journal of Manufacturing and Operations Management. – №2. – 1989. – P.105–123.

32. Asmundsson J. M. Production planning models with resources subject to congestion. / J. M Asmundsson, R. L Rardin, C. H. Turkseven, R. Uzsoy // Naval Res Logist. – 2009. – N 56 – P. 142 – 179.

Asmundsson J. M. Production planning models with resources subject to congestion. / J. M Asmundsson, R. L Rardin, C. H. Turkseven, R. Uzsoy // Naval Res Logist. – 2009. – N 56 – P. 142 – 179.

33. Пигнастый О. М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции / В. П. Демущий, В. С. Пигнастая, О. М. Пигнастый // Доповіді Національної академії наук України. - Київ: Видавничий дім "Академперіодика". - 2005. - № 7. - С. 66-71.

Pignastyj O. M. Stohasticheskoe opisanie jekonomiko-proizvodstvennyh sistem s massovym vypuskom produkci / V. P. Demuckij, V. S. Pignastaja, O. M. Pignastyj // Dopovidi Nacional'noi akademii nauk Ukraïni. - Kiïv: Vidavnychij dim "Akademperiodika". - 2005. - № 7. - S. 66-71.

34. Азаренков Н.А. Кинетическая теория колебаний параметров поточной линии / Н. А. Азаренков, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. 2014. № 12. – С. 36 –43.

Azarenkov N.A. Kineticheskaja teorija kolebanij parametrov potочноj linii / N. A. Azarenkov, O. M. Pignastyj, V. D. Hodusov // Dopovidi Nacional'noi akademii nauk Ukraïni. – 2014. – № 12. – С. 36 –43.

35. Armbruster D. Modeling production planning and transient clearing functions, / D. Armbruster, J. Fontejn, M. Wienke // Logistics Research. – 2012. – VOL 87 – №3. – P.815-822.

Armbruster D. Modeling production planning and transient clearing functions, / D. Armbruster, J. Fontejn, M. Wienke // Logistics Research. – 2012. – VOL 87 – №3. – P.815-822.